MODELOS UNIVARIANTES EN EL ANALISIS ECONOMICO

Antoni Espasa Terrades
José Ramón Cancelo de la Torre

Resumen

En este artículo se presentan los modelos univariantes ARIMA con análisis de intervención (ARIMA-IA) que bajo condiciones bastante generales ofrecen una explicación del comportamiento de la variable correspondiente, que es consistente, aunque ineficiente, con la obtenida a partir de un modelo econométrico estructural global (SEM). Esto permite la utilización de los modelos ARIMA-IA para el análisis económico. Por tal motivo estos modelos tienen un uso universal como instrumentos de predicción, pero su utilidad en el análisis económico es mucho más amplia, y en el artículo se destaca la capacidad de estos modelos para describir la naturaleza de largo plazo de las variables económicas y cuantificar, mes a mes, los parámetros que determinan tal evolución de crecimiento equilibrado.

Abstract

This paper presents a reapprisal of the role of univariate time series ARIMA models with intervention analysis (ARIMA-IA) which, under general conditions, offer an explanation of the behavior of the corresponding variable which is consistent, though inefficient, with that obtained from a multivariate structural econometric model (SEM). This allows the use of ARIMA-IA models for economic analysis, with their extended role for predictive purpose being well known. It is argued that the role of these models is much wider than the previous one, emphasizing, in particular, their capacity to describe the long-run nature of economic time series and the possibility of estimating, month to month, the parameters which govern their steady-state evolution.

1. INTRODUCCION

La información referente a gran parte de las magnitudes económicas se recoge bajo la forma de serie temporal, entendiendo como tal una sucesión de mediciones del mismo fenómeno para distintos momentos del tiempo. Para poder analizar las realizaciones del mismo es necesario disponer de un conjunto de técnicas que permitan su modelización, es decir, expresiones de carácter matemático-estadístico que sirvan para explicar la generación de los datos pasados y predecir las observaciones futuras.

Aunque la tipología de modelos es amplia, podemos distinguir dos grandes tipos en función de la información empleada en su construcción. Estos son, por una parte, los modelos univariantes, caracterizados por emplear exclusivamente información referente a la propia variable a estudiar; por otra, están los que podemos denominar modelos econométricos, que aprovechan todo tipo de relaciones para incorporar en la explicación del fenómeno otras variables cuya influencia puede ser relevante.

En este trabajo nos centraremos en el primer tipo de modelos, los modelos univariantes. Desde el punto de vista teórico son modelos ineficientes, ya que al estar construidos con el mínimo de información disponible, su capacidad de explicar/predecir necesariamente se ve mermada. Sin embargo, resultan modelos fáciles de construir, y cuyos resultados son plenamente consistentes con los de los modelos econométricos, lo que garantiza su utilidad en el análisis aplicado.

En el siguiente punto se introducen los procesos estocásticos ARMA, que constituyen un tipo de formulación suficientemente general para servir de base a la modelización univariante. Posteriormente, se extiende esta familia de procesos para incluir los procesos ARIMA, que permiten modelizar fenómenos no estacionarios, por ejemplo, fenómenos cuyo nivel medio evoluciona en el tiempo. Estos modelos son los que resultan indicados para series económicas.

A continuación, se comenta que este marco general se puede extender para tener en cuenta la existencia, en muchos casos, de perturbaciones de carácter exógeno, que suponen una ruptura respecto a la evolución anterior de la serie y, por lo tanto, precisan una modelización especial: esta extensión da lugar al llamado Modelo ARIMA con Análisis de Intervención (ARIMA-AI).

El resto del trabajo hace referencia a la predicción con modelos ARIMA, en su doble interpretación de cálculo de predicciones y generación de expectativas. Se discuten las implicaciones de los modelos univariantes en la predicción a corto, medio y largo plazo, así como la relación entre el grado de no-estacionaridad y la situación de equilibrio implícita en el modelo.

Por último, se revisan los principales resultados referentes a la fiabilidad de las predicciones con modelos univariantes, y, en especial, a la determinación de intervalos de confianza para predicciones a medio y largo plazo.

2. MODELIZACION UNIVARIANTE: FUNDAMENTOS ESTADISTICOS Y APROXIMACIONES OPERATIVAS

Todos los modelos estadísticos se basan en la descomposición de la serie observada en cada momento de tiempo t, denotada por X_t, en dos partes: la parte sistemática (PS_t) y la innovación (a_t). La parte sistemática recoge aquéllo que de regular presenta el fenómeno observado, y que se puede decir que ya era conocido antes de observar X_t. La innovación, por el contrario, es impredecible, representa lo que realmente hay de nuevo en la observación efectuada, constituyendo, por lo tanto, una "sorpresa" para los agentes. Por definición, la parte sistemática y la innovación no están relacionadas, ya que en otro caso la sorpresa no sería enteramente tal. En efecto, si estuviese correlacionada con la parte sistemática, podríamos utilizar dicha correlación para formular un modelo para la supuesta innovación. En tal caso, la parte sistemática de dicho modelo se podría incorporar a la parte sistemática del modelo de X_t, con lo quedaría como auténtica innovación la correspondiente al segundo modelo.

Lo que caracteriza a los modelos univariantes es que el conjunto de información empleado para realizar esta descomposición es la historia de la propia serie. En consecuencia, la regularidad que detectamos es exclusivamente la que se deriva de su evolución pasada, y las sorpresas lo son respecto a lo que se deriva de la extrapolación de ese pasado. Cabe, por tanto, que estas innovaciones univariantes puedan explicarse en parte en función de otras variables, lo que implica ampliar el horizonte de modelización hacia los modelos econométricos, aspecto éste que sobrepasa el ámbito de este artículo. Por lo tanto, en el contexto de este trabajo innovación implica simplemente ausencia de correlación con cualquier componente del conjunto de información considerado. Mientras que la denominación de "innovación auténtica" implicaría ausencia de correlación con cualquier tipo de información existente, característica ésta que sólo se puede obtener a partir de modelos econométricos globales.

Tal y como se ha definido, las innovaciones han de seguir un proceso estocástico ruido blanco, definido como una sucesión de variables aleatorias, a_t, no correlacionadas entre sí, de media cero y varianza, σ_a^2, constante. A lo largo de este trabajo se supondrá, además, que las innovaciones siguen una distribución normal(1).

¿Cómo se llega a construir la parte sistemática? Supongamos que la variable que estudiamos es tal que:

a) Oscila alrededor de un valor medio constante en el tiempo.

b) La dispersión alrededor de esa media, medida por su varianza, también es constante en el tiempo.

c) La relación lineal que existe entre el valor en el momento t y el valor en el momento t–k depende exclusivamente de k, pero no de t, es decir, depende del desfase que existe entre las mediciones pero no de los momentos concretos a los que estas mediciones se refieren.

Decimos entonces que X_t es estacionario (2). Además, supondremos que la correlación entre dos variables distanciadas k unidades de tiempo $-\rho_k-$ tiende a cero a medida que aumenta la separación temporal –k– entre ellas. Con estos supuestos se puede demostrar –Teorema de la Descomposición de Wold– que el valor presente X_t se puede expresar como una suma ponderada de sus innovaciones presentes y pasadas, es decir,

$$X_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots + \psi_\iota a_{t-\iota} + \dots, \qquad [1]$$

donde los coeficientes ψ_j tienen a cero a medida que j tiende a infinito, es decir, la importancia de las innovaciones pasadas en la determinación del valor actual de X llega a hacerse nula para un pasado muy lejano (3).

(1) En este caso los modelos aquí propuestos son óptimos en el sentido de minimizar el error cuadrático medio de los errores de predicción de X. Es bien sabido que bajo normalidad: a) incorrelación implica independencia, y b) las esperanzas matemáticas condicionadas son lineales respecto la información a la que se condiciona. Veremos más adelante cómo X_t se puede expresar como una combinación lineal de innovaciones presente y pasadas, con lo que la normalidad de a_t induce normalidad en el fenómeno observado. Naturalmente, la introducción del supuesto de normalidad se apoya en el cumplimiento de algún Teorema Central del Límite suficientemente general.

(2) En sentido débil o débilmente estacionario.

(3) El lector familiarizado con la literatura de procesos estocásticos ya habrá notado que procuramos obviar toda complejidad estadística del problema. La expresión (1) es naturalmente la descomposición de Wold en una versión restringida. Por otro lado, si de acuerdo con la nota 1 suponemos normalidad en las innovaciones, entonces X_t es estacionaria en sentido fuerte, ya que ninguna de las distribuciones de probabilidad que podamos considerar está referenciada a un momento concreto del tiempo. Además, y puesto que X_t es una combinación lineal de variables normales independientes, también seguirá una distribución normal.

Pues bien, dado el modelo, si conocemos la historia de la variable previa al momento t, conocemos también las sorpresas que se han producido, y es inmediato definir la parte sistemática como (4):

$$PS_t = \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \dots$$

Por tanto, [1] es una especificación del modelo univariante, donde la parte sistemática en el momento t es una suma ponderada de las infinitas sorpresas pasadas.

Definiendo el operador de retardos L como un operador lineal tal que $L X_t = X_{t-1}$, podemos reformular [1] como:

$$X_t = a_t + \psi_1 \ a_{t-1} + \psi_2 \ a_{t-2} + \dots = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) a_t = \psi_\infty(L) a_t,$$

es decir, X se obtiene a partir de sus innovaciones mediante un polimonio de desfases de longitud posiblemente infinita.

Una forma alternativa de expresar el modelo es la siguiente: aplicando la teoría de polimonios, se demuestra que si el polimonio $\psi_\infty(L)$ cumple determinadas condiciones, que denominaremos condiciones de invertibilidad y que supondremos que se cumplen, el modelo [1] es equivalente a

$$\frac{1}{\psi_\infty (L)} X_t = \Pi_\infty (L) X_t = a_t,$$

es decir,

$$X_t - \Pi_1 \ X_{t-1} - \Pi_2 \ X_{t-2} - \dots = a_t, \ [2]$$

donde ahora expresamos la parte sistemática en función de los valores pasados de la propia variable y no de sus innovaciones. Obviamente, entre los coeficientes de $\psi_\infty(L)$ y $\Pi_\infty(L)$ existe una relación única, dada por

$$\Pi_\infty(L) = \{\psi_\infty(L)\}^{-1}.$$

Las condiciones de invertibilidad implican que el pasado muy lejano de X no afecta a la determinación del valor presente, es decir, Π_j tiende a cero cuando j tiende a infinito.

La expresión [1] recibe el nombre de modelo de medias móviles de orden infinito, MA (∞), y como vemos siempre existe para una variable que sea estacionaria, tal y como definimos anteriormente este concepto. En cambio, [2] es el modelo autorregresivo de orden infinito, AR (∞), y constituye una forma alternativa de representar el modelo univariante de nuestra serie, siempre que el fenómeno sea invertible.

(4) Por todos los supuestos que estamos haciendo es la mejor explicación de X_t a partir de su historía; relajando el supuesto de normalidad de las innovaciones sería solamente la mejor explicación de X_t a partir de una función lineal de su historia.

La formulación de X_t en función de su historia infinita, bien en términos de medias móviles de innovaciones bien de expresiones puramente autoregresivas, es formalmente correcta, pero operativamente inadecuada, al requerir la determinación de infinitos parámetros, sean los de $\psi_{\infty}(L)$ o los de $\Pi_{\infty}(L)$. Se hace necesario planterse una aproximación a la formulación anterior; para ello empleamos un resultado de la teoría de polimonios que establece que, bajo condiciones muy generales, se puede aproximar un polinomio de orden infinito por un cociente de polinomios finitos, de tal forma que

$$\psi_{\infty}(L) \simeq \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)}$$

o, de manera equivalente

$$\frac{1}{\psi_{\infty}(L)} = \Pi_{\infty}(L) \simeq \frac{\phi_p(L)}{\theta_q(L)},$$

donde los subíndices p y q señalan los correspondientes órdenes; más concretamente.

$$\phi_p(L) = 1- \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p$$

$$\theta_q(L) = 1-\theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q$$

y donde se comprueba que para que se cumpla la condición de estacionaridad necesariamente las raíces de $\phi_p(L)=0$ han de tener módulo mayor que la unidad, mientras que la condición de invertibilidad implica lo mismo con las de $\theta_q(L)=0$.

Ello nos lleva a aproximar X_t por

$$\phi_p(L) X_t = \theta_q(L) a_t \qquad [3]$$

o desarrollando

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q},$$

expresión que es sólo una aproximación de X_t pero que es plenamente operativa al implicar únicamente p + q parámetros. La formulación [3] es el llamado modelo ARMA (p, q), ya que combina un proceso autorregresivo (AR) de orden p con uno de medias móviles (MA) de orden q.

En este caso, la parte sistemática, es decir, conocida con la información disponible hasta t –1, es

$$PS_t = \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q},$$

una combinación de observaciones e innovaciones pasadas.

3. EXTENSION A FENOMENOS NO ESTACIONARIOS: LOS MODELOS ARIMA

Acabamos de ver cómo la teoría estadística de los procesos estocásticos nos provee de una familia de modelos suficientemente general para aproximar fenómenos económicos que sean de carácter estacionario, tal y como se ha definido esta característica en su momento.

Sin embargo, es fácil pensar en variables económicas de interés que no presenten esta característica de estacionaridad, por ejemplo, por oscilar alrededor de una media creciente con el tiempo, como ocurre con las variables en precios corrientes. Necesitamos, pues, expandir el instrumental hasta aquí descrito para tratar este tipo de fenómenos.

En la realidad se detecta cómo en estos casos, si bien la variable observada no es estacionaria, sí lo es su incremento (velocidad) o el incremento del incremento (acelaración). Cuando la no-estacionaridad que manejamos es de esta forma, decimos que estamos en presencia de una no-estacionaridad de carácter homogéneo (5).

La formulación matemática se simplifica definiendo el operador diferencia como $\Delta = 1 - L$, de donde es obvio que

$$\Delta X_t = (1 - L)\, X_t = X_t - X_{t-1}$$

y, en general

$$\Delta^d X_t = (1 - L)^d X_t.$$

Por lo tanto, para el tratamiento de fenómenos no estacionarios de carácter homogéneo distinguiremos dos estapas: a) la determinación del valor d (generalmente 1 ó 2) que permite transformar X_t en una serie estacionaria, $\Delta^d X_t = W_t$; y b) el tratamiento de W_t de acuerdo con las técnicas descritas para fenómenos estacionarios.

Tendremos así un modelo para X_t dado por

$$\phi_p (L)\, (1 - L)^d X_t = \theta_q (L)\, a_t,$$

que es el llamado modelo ARIMA (p, d, q), que se puede expresar de forma más compacta por

$$\tilde{\Phi}_{p+d} (L)\, X_t = \theta_q (L)\, a_t,$$

o de forma extendida

$$X_t = \tilde{\Phi}_1 X_{t-1} + \ldots + \tilde{\Phi}_{p+d} X_{t-p-d} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q},$$

donde ahora

$$PS_t = \tilde{\Phi}_1 X_{t-1} + \ldots + \tilde{\Phi}_{p+d} X_{t-p-d} - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}.$$

(5) Para no complicar la exposición nos centramos en el problema de la no-estacionaridad en media. Si además la serie fuera no estacionaria en varianza habria que tomar logaritmos y considerar $\ln X_t$ en vez de X_t, o en un contexto más general, elegir la transformación más adecuada dentro de la familia de transformaciones Box-Cox.

Una importante implicación del mundo no-estacionario es que ahora el pasado no influye de manera decreciente en el presente. Para comprobarlo, tomemos un modelo sencillo, el ARIMA (0, 1, 0), dado por $\Delta X_t = a_t$, es decir,

$$X_t = \frac{1}{\Delta} a_t = \frac{1}{1-L} a_t = a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \ldots$$

Vemos cómo ahora todas las innovaciones entran con la misma ponderación en la determinación de X_t, con independencia de lo alejadas en el pasado que estén: una innovación no se olvida nunca, por lejana quc sea. Naturalmcnte la explicación se encuentra en el hecho de que ahora el polinomio autorregresivo, $\tilde{\phi}_{p+d}(L)$, contiene por definición d raíces iguales a 1, con lo que la aproximación implícita en el modelo ARIMA realmente supone el no cumplimiento de la condición de estacionaridad. Por lo tanto, una regla práctica para comprobar si un modelo dado representa un proceso estacionario o no es calcular las raíces de su polinomio autorregresivo y verificar si existe alguna igual a la unidad.

Otra implicación importante, y en parte esperada, es en términos de la varianza del proceso, ya que ahora, y volviendo al ejemplo del ARIMA (0, 1, 0)

$$\text{VAR } X_t = \text{VAR } (a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \ldots),$$

que es infinita.

Una extensión de especial interés en el análisis aplicado es la inclusión de dependencia estacional, es decir, la extensión a fenómenos donde X_t viene influenciado por lo que ha ocurrido en t–s o t–2s, siendo s el período estacional. Una formulación que se ha revelado muy adecuada en la práctica es la descomponer cada uno de los polinomios anteriores en el producto de un polinomio que capta la dependencia estrictamente regular por otro polinomio que se centra en la dependencia de carácter estacional, es decir

$$\tilde{\Phi}_{p+d}(L) = \tilde{\Phi}_{p_1+d_1}(L) \cdot \tilde{\Phi}_{p_2+d_2}(L)$$
$$\theta_q(L) = \theta_{q_1}(L) \cdot \theta_{q_2}(L).$$

Es cierto que este tipo de descomposición implica ciertas restricciones sobre el valor de algunos coeficientes, pero en el análisis económico aplicado, este tipo de restricciones se ve suficientemente validado.

La influencia de la estacionalidad puede ser de dos tipos: estacionaria y no estacionaria. Hablamos de estacionalidad estacionaria en el mismo sentido en que hablamos de estacionaridad en general: un tipo de evolución que requiere la modelización mediante un modelo ARMA estacional, pero que no plantea problemas adicionales a los estudiados al hablar de la estacionaridad no estacional o regular. La estacionalidad no estacionaria, por el contrario, supone, como la no estacionaridad de tipo regular, un tratamiento previo de la serie que la elimine. Afortunadamente, también aquí el tipo de no estacionaridad que debemos considerar es exclusivamente de carácter homogéneo, con lo que algún tipo de velocidad o aceleración de la serie original no presenta este tipo de problemas.

Concretamente, esta transformación previa pasa por tomar las llamadas diferencias estacionales, donde restamos para cada momento t el dato correspondiente a la última observación estrictamente comparable: suponiendo, para simplificar, que la serie es mensual. emplearíamos el operador $\Delta_{12} = 1 - L_{12}$ (en general, $\Delta_s = (1 - L_s)$, para calcular

$$\Delta_{12}\ X_t = (1 - L_{12})\ X_t = X_t - X_{12},$$

es decir, el incremento interanual correspondiente, incremento que al comparar dos períodos de similar carácter estacional elimina la estacionabilidad en el nivel de la serie.

Una forma alternativa de interpretar el operador Δ_{12}, es la siguiente: si factorizamos el polinomio correspondiente, vemos que

$$\Delta_{12} = 1 - L^{12} = (1 - L)\ (1 + L + L^2 + \ldots + L^{11}) = \Delta \cdot U_{11}(L).$$

En consecuencia, al aplicar Δ_{12} a X_t es como si aplicásemos Δ, el operador diferencia ya conocido, a U_{11} (L) X_t, que no es más que

$$U_{11}\ (L)\ X_t = X_t + X_{t-1} + \ldots + X_{t-11} = X_t^*,$$

es decir, el agregado de los últimos doce datos observados. Por lo tanto, esta nueva variable X_t^* ya ha perdido gran parte de su carácter estacional, y, la operación $\Delta_s\ X_t$ ha de entenderse como la diferenciación usual aplicada a una serie que ha sido previamente suavizada para eliminar la oscilación estacional en su nivel.

4. EL ANALISIS DE INTERVENCION

Los modelos ARIMA que hemos estado viendo hasta ahora tratan de captar las regularidades presentes en un fenómeno económico estudiando su evolución en el tiempo. Para la mayor parte de las variables en la casi totalidad de los momentos del tiempo, ésto proporciona excelentes resultados, pero hay situaciones en donde el valor de X en un momento dado aparece fuertemente influenciado por un acontecimiento atípico, conocido de antemano o no, pero que no tiene nada que ver con lo que hasta ese momento había sido la evolución normal de la variable.

Un ejemplo ilustrativo de este punto es el efecto que sobre el IPC ha tenido la introducción del IVA, que implicaba que una predicción para enero de 1986 basada exclusivamente en la historia de los precios fuese totalmente inadecuada.

Por lo tanto, si queremos captar el efecto de estos acontecimientos especiales, debemos completar la modelización ARIMA con el llamado Análisis de Intervención, que es una extensión del análisis con variables artificiales.

Pese a lo que a primera vista pueda parecer, con la inclusión de este tipo de variables no se pretende mejorar artificialmente el ajuste estadístico de la modelización sino: a) corregir la influencia del acontecimiento extraño en la estimación de la estructura estocástica o modelo ARIMA propiamente dicho; b) indicarle al modelo que lo que ocurrió es anómalo y, en consecuencia, prevenir que sesgue predicciones posteriores; y c) en la medida en que el acontecimiento pueda ser conocido de antemano y sus efectos estimados, mejor o peor, con anterioridad, corregir la predicción que el modelo puramente estocástico proporciona para el momento en que ocurre el acontecimiento. En cualquier caso, hay que insistir en que lo aconsejable es que el Análisis de Intervención tenga como objetivo modelizar causas concretas y conocidas.

En general, a la hora de plantearse un Análisis de Intervención hay dos aspectos a considerar: a) la definición operativa de la variable artificial a emplear, y b) el filtro dinámico que recoge la influencia de la anomalía sobre la variable estudiada.

En cuanto al primer punto, podemos escoger entre dos grandes tipos de variables, las variables impulso (D_t) y las variables escalón (S_t). Las primeras toman siempre el valor cero, excepto en un momento dado t* en que toman el valor uno; las segundas comienzan tomando el valor cero hasta un instante de tiempo, t*, momento a partir del cual pasan a tomar el valor uno.

Naturalmente, estos ceros y unos indican, respectivamente, el no-acaecimiento y el acaecimiento de algo, en nuestro caso de una anomalía. En consecuencia usaremos variables de tipo impulso con valor uno en t* cuando la anomalía sea tal que ocurre en el momento de tiempo t* y posteriormente desaparece. Por ejemplo, éste es el tipo de variable que tendríamos que considerar si analizamos la producción mensual de una empresa y sabemos que en un mes concreto ha sufrido una huelga o cierre patronal que ha paralizado de forma significativa su proceso de producción.

Las variables escalón, por el contrario, son adecuadas para modelizar cambios exógenos de carácter permanente, como pueda ser la mencionada introducción del IVA.

En cualquier caso, observese cómo la variable artificial que introducimos depende de la anomalía en sí. Esto es importante tenerlo en cuenta en el proceso de estimación, ya que aunque matemáticamente el modelo final se pueda reformular de distintas maneras, la precisión en las estimaciones será tanto mayor cuanto más fielmente expresemos en el modelo lo que realmente ocurrió.

Antes de pasar a la presentación de los filtros que ligan las variables artificiales con la variable que estudiamos, variable dependiente, un último comentario: cuando hablamos de efectos permanentes o de efectos transitorios lo hacemos refiriéndonos a una transformación concreta de la variable dependiente. Un ejemplo nos ayudará a entender este punto: el efecto de la introducción del IVA sobre el IPC (más concretamente sobre lnIPC por problemas de estacionaridad en varianza) es de carácter permanente, como se puede comprobar con la simple representación gráfica de la serie, y en consecuencia, se capta mediante una variable de tipo escalón. Ahora bien, ese mismo efecto sobre la tasa de inflación (Δ ln IPC) es de carácter transitorio, como también es de sobra conocido, y se capta mediante una variable impulso (6).

(6) De hecho el lector puede comprobar cómo $\Delta S_t = D_t$; es inmediato entonces que si sobre ln IPC_t tenemos una variable escalón S_t, sobre Δln IPC_t tendremos una variable $\Delta S_t = D_t$, es decir, un impulso.

Centrándonos ya en el filtro dinámico que recoge el efecto de la anomalía sobre la variable dependiente, necesitamos que sea suficientemente general para captar todas las posibles respuestas de interés en el análisis aplicado. De ahí que propongamos un cociente de polinomios de la forma

$$\frac{\omega_s(L)}{\delta_r(L)} = \frac{\omega_0 + \omega_1 L + \omega_2 L^2 + \ldots + \omega_s L^s}{1 - \delta_1 L - \delta_2 L^2 - \ldots - \delta_r L^r}$$

donde al numerador se le conoce como la parte MA o de medias móviles, y al denominador como la parte AR o autorregresiva (7).

La característica principal del polinomio $\omega_s(L)$ es extender en el tiempo el proceso de ajuste que experimenta la variable como consecuencia de la anomalía ocurrida: así, un acontecimiento atípico, por ejemplo un impulso, que ocurrió en t^* puede estar todavía afectando a la serie en el momento $t^* + s$. Por otra parte, la capacidad de este tipo de polinomios para captar respuestas desfasadas es general, ya que no imponemos ningún tipo de restricción sobre los coeficientes ω_j.

Por contra, el efecto de los polinomios $\delta_r(L)$ es ligeramente distinto: para verlo con más detalle, supongamos un filtro sencillo tal como

$$\frac{\omega_0}{1 - \delta L} = \omega_0 (1 + \delta L + \delta^2 L^2 + \ldots) =$$

$$= \omega_0 + \omega_0 \delta L + \omega_0 \delta^2 L^2 + \ldots$$

donde se observan claramente las dos características diferenciadoras respecto a $\omega_1(L)$:

a) El proceso de ajuste se prolonga, al menos en teoría, durante un intervalo temporal infinito; y

b) La respuesta en cada momento posterior no es general, sino que los coeficientes están restringidos: en el ejemplo, la respuesta, pasados j períodos desde que ocurrió la anomalía, es δ veces la respuesta en el momento (t +

(7) En el modelo AR(I) MA usual, X_t se puede expresar como

$$X_t = \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} a_t,$$

mientras en el modelo AR(I)MA con Análisis de Intervención

$$X_t = \frac{\omega_s(L)}{\delta_r(L)} (D_t, S_t) + \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} a_t,$$

donde es evidente el paralelismo entre el cociente de polinomios que componen el filtro de las innovaciones y el que representa el filtro de las anomalías j – 1), ya que los coeficientes varían de manera exponencial a una tasa δ. En general, los coeficientes que miden la respuesta en cada momento del tiempo tienen una estructura dictada por las raíces de $\delta_r (L) = 0$.

Obsérvese cómo, en general, este tipo de polinomios $\delta_r (L)$ ha de tratarse con cuidado: si en el ejemplo anterior δ fuese mayor que 1, tendríamos que el proceso de ajuste no sólo se extendería al infinito, sino que cuanto más lejana quedara en el tiempo, mayor sería su influencia. Este tipo de resultados no es válido, ya que el proceso de ajuste implícito en las variables económicas no es de esta forma (8).

En consecuencia, debemos garantizar que $\delta_r (L)$ sea tal que el proceso de ajuste que supone sea viable desde el punto de vista económico, y para ello, imponemos la condición de que todas las raíces de $\delta_r (L) = 0$ estén fuera del círculo unidad (9). Esto garantiza que, cualesquiera que sean la anomalía y $\delta_r (L)$, existe un valor k tal que, pasados k períodos desde el momento en que ocurrió la anomalía, podemos considerar que el proceso de ajuste ya está practicamente finalizado (10).

Todo lo que hemos dicho hasta ahora del proceso de ajuste se refería a la forma en que éste se realiza a lo largo del tiempo, sin referirnos al efecto final sobre la variable dependiente, también llamado ganancia. La ganancia no tiene especial interés cuando la variable artificial es un impulso, pues el efecto de dicha variable se acaba más o menos pronto. La ganancia es relevante cuando la variable artificial es un escalón. En tal caso tenemos que, cuando se produce una anomalía que provoca un proceso de ajuste, dicho proceso puede culminar con una nueva senda en la evolución "normal" de la variable, o con una vuelta a la evolución "normal", que observábamos con anterioridad. En el primer caso hablamos de ganancia no nula, mientras que en el segundo diremos que la ganancia es cero o, lo que es lo mismo, que el efecto total es nulo.

Para las intervenciones modelizadas con un escalón, el efecto total, o ganancia, se define de manera operativa como la suma de los diferentes efectos que experimenta la variable en el intervalo temporal que abarca el proceso de ajuste, y que se puede obtener como

$$g = \frac{\omega (1)}{\delta (1)} = \frac{\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_s}{1 - \delta_1 - \ldots - \delta_r}.$$

(8) La afirmación del texto debe matizarse: la cuestión no es tanto que no pueda haber raíces menores que 1, sino que debemos asegurarnos de que su efecto no se extienda al infinito, anulándose por el contrario más o menos pronto. Para no complicar la exposición más allá de lo necesario, no profundizamos en esta posibilidad.

(9) Cuando la anomalía se haya considerado de carácter transitorio y modelizado, en consecuencia, como un impulso, y el proceso de estimación apunte la existencia de una raíz unitaria en δ_r (L), puede suceder que la anomalía de hecho tenga carácter permanente, ya que

$$\frac{\omega_s (L)}{\delta_r (L)} D_t = \frac{\omega_s (L)}{\Delta\delta_{r-1} (L)} D_t = \frac{\omega_s (L)}{\delta_{r-1} (L)} S_t,$$

lo que debe llevarnos a revisar detenidamente tanto la estimación en sí como la información a priori que tenemos sobre esa anomalía.

(10) También se deben tomar con precaución polinomios δ_r (L) con raíces reales negativas o complejas, ya que suponen procesos de ajuste oscilatorios o cíclicos. Si bien este tipo de ajustes pueden ser válidos en situaciones concretas, no es lo que cabe esperar con carácter general.

5. LA PREDICCION CON MODELOS ARIMA

Una de las principales utilizaciones de los modelos ARIMA en el trabajo aplicado está relacionada con la predicción. Se trata de aproximar un valor futuro desconocido, $X_{T+\iota}$, con la información disponible en el momento T y sabiendo que

$$X_{T+\iota} = \phi_1 X_{T+\iota-1} + \ldots + \phi_{p+d} X_{T+\iota-p-d} + a_{T+\iota} - \\ - \theta_1 a_{T+\iota-1} \ldots - \theta_q a_{T+\iota-q}.$$

Al conjunto de información conocido en T lo denotamos por Ω_T, y recoge las realizaciones tanto de la variable en sí como de las innovaciones hasta T.

La teoría estadística nos dice que la predicción óptima, en el sentido de minimizar el error cuadrático medio, vendrá dada por $E(X_{T+\iota}/\Omega_T)$, es decir, la esperanza del valor futuro desconocido condicionada a la información disponible. Ahora bien, si reescribimos el modelo ARIMA como

$$[1 - \tilde{\phi}^*_{p+d} (L)] X_t = \theta_q (L) a_t$$

siendo $\tilde{\phi}^*_{p+d} (L) = \tilde{\phi}_1 L + \tilde{\phi}_2 L^2 + \ldots + \tilde{\phi}_{p+d} L^{p+d}$,

podemos expresar el valor de la variable en el momento $T+\iota$ como

$$X_{T+\iota} = \tilde{\phi}^*_{p+d} (L) X_{T+\iota} + \theta_q (L) a_{T+\iota}$$

y, en consecuencia, la predicción óptima ι períodos por delante basada en la información disponible en T será

$$\hat{X}_{T+\iota} = E (X_{T+\iota} /\Omega_T) = E (\tilde{\phi}^*_{p+d} (L) X_{T+\iota}/\Omega_T) + \\ + E (\theta_q (L) a_{T+\iota} /\Omega_T).$$

Por propiedades de la esperanza condicionada

$$E (\tilde{\phi}^*_{p+d} (L) X_{T+\iota}/\Omega_T) = \tilde{\phi}_1 \hat{X}_{T+\iota-1} + \ldots + \tilde{\phi}_{p+d} \hat{X}_{T+\iota-p-d}$$

y, en consecuencia, la esperanza condicionada tiene una forma autorregresiva que es la misma forma AR del modelo,pero sustituyendo realizaciones futuras desconocidas por las correspondientes predicciones. Naturalmente, si ι, p y d fuesen tales que hubiese valores conocidos en T, se sustituirían por su valor observado, ya que

$$E (X_{t^*} /\Omega_T) = X_{t^*} \qquad \forall \quad t^* \leq T.$$

A su vez,

$$E [\theta_q (L) a_{T+\iota} /\Omega_T] =$$

$$E [a_{T+\iota} /\Omega_T] - \theta_1 E [a_{T+\iota} /\Omega_T] - \ldots - \theta_q E [a_{T+\iota-q} / \Omega_T]$$

y dado que las innovaciones son absolutamente impredecibles a partir de su pasado, necesariamente las esperanzas condicionadas del lado derecho de la igualdad son de la forma

$$E(a_{t^*}/\Omega_T) = \begin{cases} a_{t^*} & \text{si} \quad t^* \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t^* > T \end{cases}$$

ya que, o bien conocemos exactamente el valor de la innovación o bien nos resulta absolutamente impredecible.

En resumen, la predicción con modelos ARIMA es sencilla (11), y se reduce a las siguientes reglas:

a) los valores conocidos en el momento en que se hace la predicción, tanto de la variable como de las sorpresas, se sustituyen por sus observaciones;

b) los valores futuros desconocidos de la variable que entren en la parte AR se sustituyen por sus correspondientes predicciones (12); y

c) las innovaciones futuras desconocidas se sustituyen por su valor esperado, cero.

De este procedimiento de predicción óptimo se deriva un interesante resultado: si predecimos para un horizonte ι suficientemente lejano, la parte MA del modelo no afecta directamente a las predicciones resultantes. A partir de un ι dado, ese efecto directo que las sorpresas pasadas tienen en el fenómeno estudiado, dejan de tenerse en cuenta en la predicción, resultando ésta exclusivamente función de los valores observados/previstos de la propia variable.

Tenemos así que las predicciones a medio plazo vendrán dadas por

$$\hat{X}_{T+\iota} = \tilde{\phi}_1 \hat{X}_{T+\iota-1} + \tilde{\phi}_2 \hat{X}_{T+\iota-2} + \ldots + \tilde{\phi}_{p+d} \hat{X}_{T+\iota-p-d} \qquad [4]$$

donde, además, podemos definir el medio plazo com un horizonte futuro suficientemente lejano como para que la incorporación directa de las sorpresas pasadas al modelo deje de producirse.

Obsérvese que, de acuerdo con [4], las predicciones siguen una ecuación en diferencias finitas de orden p + d dada por

$$\hat{X}_{T+\iota} - \tilde{\phi}_1 \hat{X}_{T+\iota-1} - \ldots - \tilde{\phi}_{p+d} \hat{X}_{T+\iota-p-d} = 0$$

o bien

$$\tilde{\phi}_{p+d}(L) \hat{X}_{T+\iota} = 0$$

ecuación que, como es sabido, tiene una solución general de la forma

$$\hat{X}_{T+\iota} = b_1^{(T)} g_1^{\iota} + b_2^{(T)} g_2^{\iota} + \ldots + b_{p+d}^{(T)} g_{p+d}^{\iota} \qquad [5]$$

donde $g_1, g_2, \ldots, g_{p+d}$ son las inversas de las raíces de

$\tilde{\phi}_{p+d}(L) = 0$, o lo que es lo mismo (13)

$$\tilde{\phi}_{p+d}(L) = (1 - g_1 L)(1 - g_2 L) \ldots (1 - g_{p+d} L)$$

y $b_1^{(T)}, B_2^{(T)}, \ldots, b_{p+d}^{(T)}$

(11) Esta sencillez se debe en gran parte al supuesto de normalidad introducido en el epígrafe dos. Relajando el supuesto de normalidad, las predicciones anteriores son sólo linealmente óptimas, es decir, son las mejores predicciones que se pueden obtener a partir de funciones lineales de la información esperada; sin embargo, $E(X_{T+\iota}/\Omega_T)$ ya no será una función lineal de Ω_T, y, en consecuencia, habrá predicciones no lineales que arrojen mejores resultados que las del modelo ARIMA

(12) Por lo que todas las predicciones se hacen de manera recursiva, aunque sólo estemos interesados en las predicciones a ι períodos por delante.

(13) Suponemos que para simplificar que las p + d raíces son reales y distintias. La extensión a raíces complejas y/o reales repetidas es trivial pero complica innecesariamente la notación.

son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones de contorno concretas del problema.

A la expresión [5] se la conoce con el nombre de función de predicción final, según la cual la predicción a medio plazo depende de tres factores:

— la parte autorregresiva del modelo, a través de la factorización de $\tilde{\phi}_{p+d}(L)$, que recoge la dinámica relevante en la predicción a medio plazo.
— el horizonte de predicción, que aparece como potencia de $g_1, \ldots g_{p+d}$.
— la información más reciente sobre el fenómeno disponible en el momento de hacer la predicción, simbolizada en las condiciones de contorno que permiten la determinación de las constantes $b_j^{(T)}$.

Este último factor merece especial mención, ya que, en sentido estricto, no tenemos una única función de predicción final para la variable que estudiamos, sino una familia de funciones de predicción final, que asocia a cada momento base de la predicción una función concreta, según la información disponible en el momento de predecir. Es en ese sentido en el que decimos que los modelos ARIMA permiten un mecanismo generador de predicciones muy flexiles.

6. LA FUNCION DE PREDICCION COMO MECANISMO GENERADOR DE EXPECTATIVAS

Acabamos de ver cómo la modelización ARIMA nos permite obtener predicciones para cualquier horizonte futuro; además, al ser las predicciones la esperanza del valor futuro desconocido condicionada a la información disponible en el momento de predecir, son las más eficientes entre todas las que empleen el mismo conjunto de información.

En la literatura económica, tradicionalmente se ha tendido a separar los conceptos de predicción y expectativa, ya que el primero se veía como algo objetivo y global para el sistema en conjunto, mientras el segundo, por lo general, se limitaba a ciertos agentes y se modelizaba de forma un tanto arbitraria. Afortunadamente, ya en la década pasada, se puso de manifiesto la inconsistencia de este planteamiento de las expectativas, señalando que la supuesta racionalidad de los agentes económicos exigía una formulación eficiente de las mismas.

Ahora bien, dado que las expectativas no son más que el valor esperado de una variable desconocida, y dado que, a su vez una predicción también se define formalmente como una esperanza donde la información se usa de manera eficiente, el paso siguiente es claro: la exigencia de que las expectativas de los agentes sean eficientes implica igualar las expectativas, en principio subjetivas, que los agentes forman sobre algo desconocido a partir de un determinado conjunto de información, con la predicción óptima, objetiva, que podemos hacer con ese mismo conjunto de información (14).

(14) No estamos diciendo con ello que las expectativas necesariamente se tengan que formar con toda la información disponible en la economía; nuestra formulación es más general, en el sentido de que se puede emplear cualquier subconjunto de ésta con tal que se emplee de manera eficiente.

¿Cuál se supone que es el conjunto de información que los agentes disponen a la hora de forman sus expectativas? La contestación exacta es difícil de dar, ya que dependerá en gran medida del fenómeno que estemos estudiando. Lo que si podemos considerar es un conjunto mínimo de información, que no es otro que la historia de la propia variable que estén considerando. Por poner un ejemplo, supongamos el caso de un empresario que trata de cuantificar el precio esperado del producto que vende para el próximo año: podemos plantearnos hasta qué punto considera variables como la evolución general de la economía, nivel general de precios, precios de productos alternativos, efecto de la publicidad sobre los gustos de los demandantes, etc. Sin embargo, no dudaremos en incluir entre la información que maneja los precios concretos que el mercado fijó para ese producto en el pasado.

Por todo ello, la función de predicción derivada de un modelo ARIMA se puede interpretar también como un mecanismo generador de expectativas y viceversa, una forma sencilla de generar expectativas para un agente económico es mediante la predicción óptima condicionada a la historia pasada de la serie. Así, de la misma forma que la predicción derivada de un modelo ARIMA actúa como un umbral que debe superar la predicción con un modelo econométrico para que este último sea realmente útil, mecanismos de generación de expectativas más complejos han de superar el requisito mínimo que marcan las expectativas univariantes óptimas. Este requisito se refiere a que la incertidumbre asociada a las expectativas univariantes (véase sección 8) deberá reducirse, o al menos no ampliarse, con mecanismos más complejos, por ejemplo modelos econométricos, de formación de expectativas.

7. LA CARACTERIZACION DEL EQUILIBRIO A LARGO PLAZO

Hemos visto que las predicciones a medio plazo venían dadas por la solución general de la ecuación homogénea en diferencias finitas.

$$\bar{\Phi}_{p+d}(L)\, X_{T+\iota} = 0,$$

que, recordemos, era

$$X_{T+\iota} = b_1^{(T)} g_1^{\iota} + b_2^{(T)} g_2^{\iota} + \ldots + b_{p+d}^{(T)} g_{p+d}^{\iota}.$$

Si ahora hacemos que el horizonte de predicción ι tienda a infinito, estaremos haciendo predicciones a largo plazo. Vimos anteriormente cómo separábamos el corto plazo del medio plazo basándonos en el horizonte futuro a partir del cual las últimas sorpresas observadas dejaban de entrar directamente en la predicción; de manera similar, ahora intentaremos establecer una separación operativa entre el medio plazo y el largo plazo.

Para este último, estamos imponiendo un horizonte futuro realmente lejano, ya que exigimos que ι tienda a infinito. Con ello, nos aseguramos de que transcurra el tiempo suficiente para que desaparezca todo lo que hay de transitorio, todo lo que antes o después dejará de influir en la variable, de manera que la predicción resultante dependerá exclusivamente de lo que hay de permanente en la misma. Estamos dando un margen de tiempo suficiente como para que se realicen todos los ajustes que están implícitos en la actualidad, y la variable muestre lo que es su evolución de fondo, una vez desaparecido todo lo que hay de transitorio en la misma. En definitiva, estamos dejando que se completen todos los ajustes en curso y que, en consecuencia, la variable alcance su situación de equilibrio o de crecimiento equilibrado.

Detrás de este razonamiento, ocupa un lugar destacado la impredictibilidad de las innovaciones que ocurren con posterioridad al momento base de la predicción. En efecto, todas las predicciones, a corto, medio y largo plazo, están hechas con la información disponible en T, por lo que ese equilibrio a largo plazo que derivamos se alcanzaría solamente en ausencia de sorpresas futuras, es decir, sólo si entre T y $T+\iota$ ($\iota \rightarrow \infty$) no entrase ningún tipo de nueva información en el sistema.

Esta afirmación, a primera vista, resulta muy desalentadora, ya que la pregunta que provoca es clara: ¿qué interés tiene una predicción a largo plazo, cuando sólo observaríamos ese valor a) pasados infinitos períodos de tiempo y b) si no hubiese sorpresas en el futuro, lo que sabemos de antemano que no se va a cumplir? En efecto, si interpretamos la predicción a largo plazo como el valor que va a tomar la variable bajo estas condiciones, su utilidad es nula; sin embargo, si la interpretamos como el valor de equilibrio hacia el que tiende la variable latente en el momento en que realizamos la predicción, su uso resulta mucho más claro.

De acuerdo con esta interpretación, la predicción a largo plazo, o senda de equilibrio o crecimiento equilibrado, que realizamos hoy es el valor que tomaría la variable si: a) no estuviera sometida a perturbaciones transitorias que la apartan de su equilibrio, y b) no estuviese sufriendo procesos de ajuste más o menos intensos y prolongados que tratan de absorber perturbaciones de carácter transitorio ocurridas en el pasado.

En el momento T los valores de la senda de largo plazo no sólo se pueden calcular para horizontes lejanos, sino también para horizontes muy próximos, es decir, para T, $T + \iota$, etc. Desde este punto de vista, resulta que la predicción a largo plazo se interpreta como una estimación de lo que hay de permanente en el dato que observamos hoy, ya que los datos contienen factores de carácter transitorio que antes o después desaparecerán.

Esta discusión está íntimamente relacionada con nuestra afirmación realizada al principio de este trabajo de que los resultados de un modelo ARIMA son consistentes con los de un modelo econométrico, estando la diferencia entre ambos fundamentalmente en la precisión con la que realizan sus estimaciones. Uno de los productos más importantes de un modelo econométrico es la caracterización de la situación a largo plazo de las variables endógenas, relacionándola con la evolución de las variables exógenas. Naturalmente, un modelo univariante no puede pretender relacionar variables al no incluir más información que el pasado de la variable que estudia, pero si realmente es compatible con un modelo econométrico ha de tener implícita una situación de equilibrio, lo que realmente ocurre, como acabamos de ver.

Antes vimos la forma de la función de predicción a corto y medio plazo. Veamos ahora a qué se reduce cuando planteamos predicciones a largo plazo. Uno de los principales resultados que surgen de la predicción a largo plazo es que el tipo concreto de modelo que estamos considerando, y más específicamente la caracterización de la estacionaridad/no estacionaridad, va a tener importantes consecuencias sobre el mecanismo de generación de predicciones a largo plazo, o, lo que es lo mismo, sobre el tipo de equilibrio latente en la evolución del dato observado.

Con este fin, vamos a plantear una tipología de fenómenos económicos/modelos ARIMA empleados en su modelización, en función del tipo de equilibrio implícito en cada caso.

A) Fenómenos estacionarios de media cero:

Este tipo de fenómenos tiene asociado un modelo ARIMA de la forma

$$\phi_p (L)\, X_t = \theta_q (L)\, a_t,$$

donde todas las raíces de $\phi_p (L) = 0$ están fuera del círculo unidad. En consecuencia, en la expresión de la función de predicción final

$$\hat{X}_{T+\iota} = b_1^{(T)} g_1^{\iota} + b_2^{(T)} g_2^{\iota} + \ldots + b_p^{(T)} g_p^{\iota}$$

tendremos que $|g_j| < 1 \quad \forall j$, con lo que

$$\lim_{\iota\to\infty} X_{t+\iota} = 0.$$

Por lo tanto, este tipo de fenómenos está caracterizado por una situación de equilibrio a largo plazo igual a cero, cualquiera que sea el modelo ARMA que lo genere o la situación que actualmente atraviese. De ahí que difícilmente podamos encontrar fenómenos económicos que, como tales, sean directamente modelizables mediante procesos ARMA con media cero, ya que no abundan variables reales que estén caracterizadas por este tipo de situación de equilibrio.

B) Fenómenos estacionarios con media distinta de cero:

En este caso tendremos un modelo de la forma

$$\phi_p (L)\, (X_t - \mu) = \theta_q (L)\, a_t,$$

siendo $\mu \neq 0$ la media de X, y $\phi_p (L)$ estacionario. Según acabamos de ver, es inmediato que si definimos $Y_t = X_t - \mu$ entonces $\lim_{\iota\to\infty} Y_{T+\iota} = 0$, con lo que la predicción a largo plazo para X vendrá dada por $\lim_{\iota\to\infty} X_{t+\iota} = \mu$.

En consecuencia, este tipo de fenómenos está caracterizado por una situación de equilibrio constante e independiente tanto de la dinámica concreta del modelo ARMA como de la situación actual.

C) Fenómenos con una diferencia de media cero:

En este caso tendremos

$$\phi_p (L)\, \Delta X_t = \theta_q (L)\, a_t,$$

con una factorización del polinomio $\tilde{\phi}_{p+1} (L) = \phi_p (L).\, \Delta$, dada por

$$\tilde{\phi}_{p+1} (L) = (1-g_1 L)\,(1-g_2 L) \ldots (1-g_p L)\,(1-L),$$

que implica la función de predicción final

$$\hat{X}_{T+\iota} = b_1^{(T)}\, g_1^{\iota} + b_2^{(T)}\, g_2^{\iota} + \ldots + b_p^{(T)}\, g_p^{\iota} + b_0^{(T)}\, 1^{\iota}.$$

Es fácil comprobar que si hacemos que ι tienda a infinito, los p primeros sumandos, al recoger la contribución de la parte estacionaria de $\tilde{\phi}_{p+1} (L)$, tenderán a cero; sin embargo, el sumando que se debe a la presencia de $\Delta = 1- L$ no lo hará, ya que

$$\lim_{\iota \to \infty} b_0^{(T)}\, 1^{\iota} = b_0^{(T)}$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{\iota \to \infty} \hat{X}_{T+\iota} = b_0^{(T)}.$$

Por lo tanto, los fenómenos con una diferencia de media cero participan de algunas características de los fenómenos estacionarios de media no cero, ya que en ambos casos el valor de equilibrio es una constante. Sin embargo, en el caso que actualmente nos ocupa, esta constante depende de la información disponible en el momento en que realizamos la predicción: el equilibrio es un valor dado, pero a lo largo del tiempo la aparición de sucesivas sorpresas hace que ese valor se vaya modificando. Esto es consecuencia del hecho de que en un mundo no estacionario las innovaciones no se olvidan, por lo que llegan a afectar a lo que hay de permanente en el sistema.

D) Fenómenos con dos diferencias y media cero:

El modelo ARIMA será en este caso

$$\phi_p (L)\, \Delta^2 X_t = \theta_{q'}(L)\, a_t,$$

con una función de predicción final (15)

$$\hat{X}_{T+\iota} = [b_0^{(T)} + b_1^{(T)}\ \iota]\ 1^{\iota} + b_2^{(T)}\ g_1^{\iota} + \ldots + b_{p+1}^{(T)}\ g_p^{\iota},$$

donde una vez más la contribución del polinomio estacionario $\phi_p(L)$ a largo plazo tiende a cero, y, en consecuencia (16)

$$\lim_{\iota \to \infty} \hat{X}_{T+\iota} = b_0^{(T)} + b_1^{(T)} . \iota$$

Por lo tanto, implícita en la serie observada se encuentra una situación de crecimiento equilibrado que es una función lineal del tiempo. Esto no es ninguna sorpresa, ya que una serie que se modeliza empleando el operador Δ^2 presenta una evolución cuasilineal; por lo tanto, lo más razonable es que lo que hay de permanente en la misma siga también ese tipo de evolución, ya que en caso contrario la discrepancia entre valor observado y equilibrio latente tendría poco de transitoria.

Obsérvese cómo más que un equilibrio en sí, esta variable presenta una situación de crecimiento equilibrado, con una pendiente igual a $b_1^{(T)}$. Este parámetro lo podemos denominar inercia, y, en definitiva, nos viene a dar la tasa de crecimiento de equilibrio del fenómeno en cuestión.

Hay que destacar el hecho de que esa situación de crecimiento equilibrado depende expresamente de la experiencia vivida en el momento actual: a medida que se va recibiendo nueva información sobre la evolución de la variable, se van revisando los parámetros de la función de equilibrio a largo plazo, y muy especialmente el valor de la tasa de crecimiento de equilibrio.

E) Fenómenos con una diferencia y media distinta de cero:

Es el caso en que el modelo adecuado resulta ser

$$\phi_p(L)\ [\Delta X_t - \mu] = \theta_q(L)\ a_t,$$

es fácil comprobar que en este caso $X_t = X_{1t} + X_{2t}$, donde X_{1t} es puramente determinístico ($X_{1t} = \mu/\Delta$) y X_{2t} es un proceso con una raíz unitaria y media cero. De aquí se deduce que

$$\lim_{\iota \to \infty} \hat{X}_{T+\iota} = \lim_{\iota \to \infty} \hat{X}_{1T+\iota} + \lim_{\iota \to \infty} \hat{X}_{2\,T+\iota} =$$

$$= X_{1t} + \mu\,\iota + b_0^{(T)} = b^{*(T)}_0 + \mu\iota$$

siendo $\hat{X}_{1\,t+\iota} = X_{1\,t+\iota} = X_{1t} + \mu\iota$ y $b_0^{(T)}$ la contribución a largo plazo de la raíz unitaria.

(15) La factorización del polinomio autorregresivo ampliado es ahora
$\tilde{\phi}_{p+2}(L) = (1 - g_1 L)(1 - g_2 L) \ldots (1 - g_p L)(1 - L)(1 - L)$
y al haber dos raíces reales iguales, su contribución a la solución general de la ecuación es ahora
$[b_0^{(T)} + b_1^{(T)}\ \iota]\ 1^{\iota}$.

(16) En sentido estricto, este límite es más o menos infinito, según el signo de $b_1^{(T)}$. Sin embargo, se sobreentiende que cuando tomamos límites buscamos el comportamiento asintótico de las raíces del polinomio autorregresivo, y en ese sentido en el límite $X_{t+\iota}$, tiende al coeficiente de ι^{ι}. Seguimos con esta convención a lo largo del texto.

Vemos así que esta situación de equilibrio es muy similar a la del caso anterior, con una sola diferencia que, por otra parte, se revela crucial: la pendiente, es decir, la cuantificación del crecimiento en equilibrio, es fija, y, por lo tanto, independiente de la situación que esté atravesando en estos momentos el fenómeno. Así, en este tipo de fenómenos las innovaciones llegan a modificar lo que hay de permanente en la serie, pero sólo en la parte de la ordenada en el origen de la función que representa la situación de equilibrio (17).

F) Fenómenos con una diferencia regular, una diferencia estacional y media cero:

La expresión general de este tipo de modelos vendrá dada por

$$\phi_p (L)\Delta\Delta_s X_t = \theta_q (L) a_t$$

siendo $\phi_p(L)$ estacionario, s el período estacional y $\Delta_s = 1 - L^s$ el operador de diferencia estacional. Si consideramos datos mensuales, lo anterior se reduce a

$$\phi_p (L)\Delta\Delta_{12} X_t = \theta_q (L) a_t \quad . \qquad [6]$$

Como vimos anteriormente, el operador de diferencias se puede expresar como $\Delta_{12} = \Delta . U_{11} (L)$, con lo que [6] equivale a

$$\phi_p (L)\Delta^2 U_{11} (L) \; X_t = \theta_q (L) a_t.$$

Por lo tanto, la función de predicción final tendrá ahora p+13 sumandos, que se pueden descomponer en tres partes:

— p sumandos que se deberán a la contribución de ϕ_p (L) es decir, de la estructura autorregresiva estacionaria. Naturalmente, a largo plazo su influencia será nula.

— 2 sumandos que recogen la doble raíz igual a uno derivada del operadorΔ^2. A largo plazo tendrán una contribución dada por $b_0^{(T)} + b_1^{(T)} \iota$, tal y como veíamos al estudiar el caso D).

— 11 sumandos que recogen las raíces de U_{11} (L) = 0. No vamos a entrar en el detalle de cuáles son estas raíces, pero sí decir que todas tienen módulo unidad. Dado que estas raíces están recogiendo oscilaciones de carácter estacional, su contribución conjunta asignará un determinado valor a cada mes concreto, valor que modificará el tratamiento uniforme implícito en Δ^2.

En conjunto, la predicción a largo plazo vendrá dada por

$$\lim_{\iota \to \infty} \hat{X}_{T+\iota} = \sum_{j=1}^{12} b^{*(T)}_{0j} + b_1^{(T)} \iota,$$

(17) En este sentido, este caso representa una situación intermedia entre el anterior y las modelizaciones del tipo $X_t = a + bt + \eta_t$, siendo η_t un residuo que sigue un proceso ARMA estacionario. La situación de equilibrio de este tipo de modelos vendrá dada por $X_{T+\iota} = a + b (T + \iota)$, donde ambos parámetros son independientes de la última información disponible.

donde las constantes $b_{oj}^{*(T)}$ se derivan a partir de la combinación de la ordenada en el origen común $b_o^{(T)}$ (que se surge a su vez de la contribución de Δ^2), con los efectos diferenciadores inducidos por el filtro puramente estacional $U_{II}(L)$.

Nótese que todos los parámetros son función de la información disponible en el momento de realizar la predicción, por lo que la influencia de las innovaciones en lo que hay de permanente en la serie también se extiende a los factores estacionales. Por otra parte, se puede comprobar que la estacionalidad implícita en este tipo de modelos hace referencia exclusivamente a la ordenada en el origen de la función generadora de valores de equilibrio; la pendiente, o crecimiento en equilibrio del fenómeno en cuestión, no presenta este tipo de oscilaciones de carácter estacional.

Los seis casos anteriores, sin agotar todas las posibilidades que se pueden presentar, sí recogen la inmensa mayoría de los modelos univariantes que se emplean en la modelización de series económicas.

Antes de terminar esta discusión, queremos hacer notar cómo esta caracterización del tipo de predicción a largo plazo/situación de equilibrio implícita en un modelo ARIMA aporta una información muy valiosa para el usuario de este tipo de modelos. Por un lado, porque permite evaluar el valor de equilibrio del fenómeno que estudia en todo momento, y, en consecuencia, cuantificar la discrepancia existente entre el valor que observa y ese equilibrio latente. Por otro, porque es una manera sencilla, y al mismo tiempo muy potente, de detectar modelos mal construidos, ya que cuando el tipo de equilibrio implícito en el modelo no concuerde con la información teórica disponible, es bastante probable que el modelo esté mal especificado.

8. PREDICCION E INCERTIDUMBRE

En los epígrafes anteriores veíamos cómo predecir con los modelos ARIMA, estudiando las implicaciones de las predicciones a corto, medio y largo plazo. Sin embargo, este análisis es incompleto si no se añade un estudio de la fiabilidad de la predicción en cada caso; en consecuencia, en este punto pasamos a la consideración de los momentos de segundo orden relacionados con la predicción y, más concretamente, con los errores que cometemos.

Para ello recordemos que cualquier modelo ARIMA se puede reexpresar como un proceso de medias móviles de orden infinito, de la forma

$$X_t = \psi_\infty(L)\, a_t = a_t + \psi_1\, a_{t-1} + \psi_2\, a_{t-2} + \ldots$$

donde a medida que nos remontamos en el pasado, la sucesión de coeficientes ψ_j tiende a cero si el proceso es puramente ARMA, a una constante si tenemos una raíz unitaria, a más/menos infinito de forma lineal si el proceso de partida incluye una doble diferenciación, etc.

Es inmediato también comprobar que, cualquiera que sea el horizonte futuro ι

$$X_{T+\iota} = a_{T+\iota} + \psi_1 \; a_{T+\iota-1} \; + \ldots + \psi_\iota \, a_T + \psi_{\iota+1} \, a_{T-1} + \ldots$$

y dado que

$$\hat{X}_{T+\iota} = E\,(X_{T+\iota}/\Omega_T) = \psi_\iota \, a_T + \psi_{\iota+1} \; a_{T-1} \; + \ldots$$

el error de predicción l períodos por delante vendrá dad por

$$e_{T+\iota} = X_{T+\iota} - \hat{X}_{T+\iota} = a_{T+\iota} + \psi_1 \, a_{T+\iota-1} + \ldots + \psi_{\iota-1} \, a_{T+1}$$

es decir, es una función lineal de las sorpresas producidas con posterioridad al momento en que realizamos la predicción, y, por lo tanto, desconocidas cuando generamos $\hat{X}_{T+1}$.

Se comprueba fácilmente que el valor esperado de ese error es cero y su varianza viene dada por (18).

$$\text{var}\,(e_{T+\iota}) = 1 + \psi_1^2 + \ldots + \psi_{\iota-1}^2 \, \sigma_a^2 \quad . \qquad [7]$$

Observamos cómo cuanto más nos alejamos en el futuro mayor será la varianza del error de predicción y menor la fiabilidad que la misma nos merezca. Por lo tanto, y respecto a la discusión de los puntos anteriores, podemos decir que la predicción a medio plazo resulta menos fiable que la predicción a corto, pero a su vez, más que la predicción a largo.

Centrémonos en esta última: ¿qué sucede cuando ι tiende a infinito? Es fácil comprobar que la varianza del error de predicción resultante es la suma de infinitos términos, todos ellos positivos, con lo que podemos preguntarnos si esta varianza llega a tomar un valor finito o no.

La contestación depende del tipo de fenómeno con el que tratemos: si el fenómeno es estacionario, sabemos que la expresión [7] está acotada cuando ι tienda a infinito, y más concretamente, que

$$\underset{\iota \to \infty}{\text{var}}\,(e_{T+\iota}) \quad \longrightarrow \quad \text{var}\,(X)$$

resultado que en modo alguno puede sorprender: veíamos cómo con modelos estacionarios la proyección de un valor futuro muy lejano desconocido sobre la información disponible en el presente era igual a cero; dicho de otra forma, el presente no aportaba información sobre el futuro lejano y, en consecuencia, la esperanza condicionada tendía a la esperanza sin condicionar. No puede extrañar entonces que lo mismo ocurra con la varianza: al no haber explicación del futuro por parte del presente, no conseguimos reducir en nada la incertidumbre sobre aquél.

Totalmente distinto es el caso que plantean los modelos con una diferencia: ahora los coeficientes ψ_j tienden a una constante, por lo que el término entre paréntesis de la expresión [7] tiende a infinito si lo hace ι. Por lo tanto, la incertidumbre sobre el futuro en fenómenos no estacionarios no sólo es creciente sino que no está acotada: eventualmente tendremos una varianza del error de predicción infinita, o lo que es lo mismo, la distribución de $e_{T+\iota}$ condicionada a la información en T en el límite deja de tener momentos de segundo orden.

(18) Aunque no lo recalquemos continuamente para no cansar al lector, todos los momentos que derivamos se entiende que son de la función de densidad de $e_{T+\iota}$ condicionado a la información disponible en T.

Ahora bien, un proceso integrado de orden uno carece de varianza, por lo que este resultado también era de esperar. La característica principal de un proceso no estacionario es que las sorpresas que recibe el sistema no se olvidan, sino que se incorporan, al menos en parte, al sistema. Así, cuanto mayor es ι más sorpresas afectan a la incertidumbre que rodea a la predicción, con lo que ésta crece sin parar.

¿Por qué ésto no ocurre en un proceso estacionario? Simplemente porque antes o después las sorpresas se olvidan: como hemos dicho, los coeficientes ψ_j tienden a cero para un j grande, por lo que existe un valor k a partir del cual estos coeficientes son despreciables y las correspondientes innovaciones no afectan a la variable.

Así, y dado que

$$X_t = \psi_\infty(L)\, a_t \approx \psi_k(L)\, a_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \ldots + \psi_k a_{t-k}$$

tendremos que

$$e_{T+\iota} \approx a_{T+\iota} + \psi_1 a_{T+\iota-1} + \ldots + \psi_k a_{T+\iota-k}$$

y por muy lejano que sea el horizonte futuro sólo importa la incertidumbre inducida por k+1 innovaciones.

Todo lo que decíamos para fenómenos con una raíz unitaria se extiende, con más fuerza si cabe, a fenómenos con un orden de integración mayor, bien sea éste Δ^2, $\Delta\Delta_{12}$, $\Delta^2\Delta_{12}$, etc. Consideremos el caso de Δ^2: ahora los coeficientes ψ_j no tienden a una constante, sino que crecen de forma lineal. Por lo tanto, la varianza del error de predicción crece a más velocidad en un modelo con dos diferencias que en un modelo con una, lo que implica, manteniendo constantes los demás factores, una peor predicción.

Un último comentario antes de terminar: este comportamiento de los errores de predicción, lejos de ser un inconveniente de los modelos ARIMA, es una prueba de su adecuación para modelizar fenómenos económicos reales. Es bien sabido que la evolución futura de la economía, en sus múltiples facetas, está dominada por la incertidumbre, tanto mayor cuanto más lejano sea el horizonte al que queremos predecir. Lo único que hacen los modelos ARIMA es recoger esta característica del mundo real, punto en el que fallan otras técnicas de predicción, y que, por lo tanto, se pueden cuestionar en un planteamiento serio del problema de predicción económica.

REFERENCIAS

Box, G. E. P., y G. M. Jenkins (1970), *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden Day.

Box, G. E. P., y G. C. Tiao (1975), "Intervention Analysis with applications to economic and environmental problems". *J. of the American Statistical Association,* v. 70. n.º 349, pgs. 70-79.

Granger, C.W.J. y P. Newbold (1977), *Forecasting Economic Series,* Academic Press, New York.